PRÁCTICA Nº 11

Espacios vectoriales euclídeos

1. PRODUCTOS ESCALARES

1.1. DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

Dado un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, un producto escalar es una aplicación:

$$< , > : V \times V \rightarrow \mathrm{R}$$

verificando las siguientes propiedades:

i. $< u, v > = < v, u >$; para todo $u, v \in V$.
ii. $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$; para todo $u, v, w \in V$.
iii. $< a\, u, v > = a < v, u >$; para todo $u, v \in V$, y para todo $a \in \mathrm{R}$.
iv. Para todo $u \in V$, $< u, u > \geq 0$ y $< u, u > = 0$, si y sólo si, $u = 0$.

Un espacio vectorial euclídeo es un par (V, < , >) formado por un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ y un producto escalar en él.

En Mathematica los definiremos como funciones de la forma:

p[vector1_, vector2_] := …

Por ejemplo, si en R^n queremos definir el producto escalar:

$$< (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

escribiremos:

In[]:= **PE1[x_, y_] := Sum[x[[i]]*y[[i]], {i, Length[x]}];**

1.2. MATRIZ DE GRAM.

Dado un espacio vectorial euclídeo (V, < , >) y una base $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de V, la matriz $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = < e_i, e_j >$, esto es,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama matriz de Gram respecto de la base *B*. Y tenemos que

$$< e_i, e_j >= e_i{}^{\mathrm{t}} A e_j$$

Con Mathematica podemos programar una función que la calcule:

Gram[base_, PE_] := Table[PE[base[[i]], base[[j]]],
{i, Length[base]}, {j, Length[base]}];

En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar anterior y respecto de la base de la base *B* = {(1, 1, 1), (-1, 0, 3), (0, 1, 0)}:

In[]:= **MatrixForm[Gram[{{1, 1, 1}, {-1, 0, 3}, {0, 1, 0}}, PE1]]**

Out[]= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. NORMA Y ÁNGULO

2.1. NORMA DE UN VECTOR.

Dado (*V*, < , >) un espacio vectorial euclídeo, se define la norma de un vector como:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}$$

Con Mathematica, definimos la función:

Norma[x_, p_] := Sqrt[p[x, x]];

donde ‘x’ es el vector y ‘p’ es el producto escalar.

2.2. ÁNGULO ENTRE VECTORES.

El ángulo entre dos vectores es el único 0 ≤ α ≤ tal que,

$$\cos \alpha = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Y con Mathematica definimos la siguiente función, que tiene por argumentos los vectores ‘x’ e ‘y’ y el producto escalar ‘p’:

Ángulo[x_, y_, p_] := ArcCos[p[x, y]/(Sqrt[p[x, x]]*Sqrt[p[y, y]])];

3. BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

3.1. MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT.

En este epígrafe vamos a ver cómo podemos calcular una base ortonormal de un espacio vectorial *V* a partir de una base cualquiera, para ello aplicaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. En primer lugar, lo aplicaremos a un ejemplo en el que el producto escalar es el usual y posteriormente lo haremos para un producto escalar arbitrario.

Consideremos (V, < , >) un espacio vectorial euclídeo y dada $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de V, tratamos de construir una base ortogonal que representaremos por $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, para ello se calcula:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= u_1, \\
e_2 &= u_2 - \frac{< u_2, e_1 >}{\|e_1\|^2}.e_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
e_n &= u_n - \frac{< u_n, e_1 >}{\|e_1\|^2}.e_1 - \ldots - \frac{< u_n, e_{n-1} >}{\|e_{n-1}\|^2}.e_{n-1}
\end{aligned}
$$

Y si además queremos que sea una base ortonormal, bastará con dividir cada vector por su norma.

Con Mathematica, podemos programar directamente el método de Gram-Schmidt:

```
GramSchmidt[base_, p_] := Module[{baseortogonal}, baseortogonal = {base[[1]]};
  Do[
    AppendTo[baseortogonal, base[[i + 1]] - Sum[(p[base[[i + 1]], baseortogonal[[j]]]/
      p[baseortogonal[[j]], baseortogonal[[j]]])*baseortogonal[[j]], {j, i}]];
   , {i, 1, Length[base] - 1}];
  Return[baseortogonal];
];
```

Ejemplo. Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio vectorial euclídeo con el producto escalar usual y sea la base B = {(1,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1)}, vamos a calcular la base ortogonal asociada:

```
In[]:=    B={{1,1,1},{1,-1,0},{1,0,-1}};
```

Primero lo hacemos con las fórmulas del método de Gram-Schmidt:

```
In[]:=    Bo=Table[0,{i,1,3}];
          Bo[[1]] = B[[1]];
          Bo[[2]] = B[[2]] – ((B[[2]].Bo[[1]])/(Bo[[1]].Bo[[1]]))*Bo[[1]];
          Bo[[3]] = B[[3]] – ((B[[3]].Bo[[1]])/(Bo[[1]].Bo[[1]]))*Bo[[1]] –
                   ((B[[3]].Bo[[2]])/(Bo[[2]].Bo[[2]]))*Bo[[2]];
          Print[Bo]
```

Out[]= {{1, 1, 1}, {1, -1, 0}, {1/2, 1/2, -1}}

Y directamente con la función que hemos programado:

In[]:= **PE1[x_,y_]:=x.y;**
B' = GramSchmidt[B, PE1]

Out[]= {{1, 1, 1}, {1, -1, 0}, {1/2, 1/2, -1}}

Observemos que la matriz de Gram respecto de la nueva base es una matriz diagonal:

In[]:= **MatrixForm[Gram[B', PE1]]**

Out[]= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Y ahora, la transformamos en base ortonormal:

In[]:= **B'' = Table[B'[[i]]/Sqrt[PE1[B'[[i]], B'[[i]]]], {i, Length[B']}]**

Out[]= $\{\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\}, \{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\}\}$

Y, en efecto, la matriz de Gram respect de la nueva base es la matriz identidad:

In[]:= **Gram[B'', PE1] == IdentityMatrix[3]**

Out[]= True

Ejemplo. Consideremos $\mathbb{R}^4$ el espacio vectorial euclídeo cuyo producto escalar viene dado por:

$$<(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)> = 2\, x_1\, y_1 + 2\, x_2\, y_2 + 4\, x_3\, y_3 + 2\, x_4\, y_4 + x_1\, y_3 + x_3\, y_1 + x_2\, y_3 + x_3\, y_2 + x_3\, y_4 + x_4\, y_3$$

Lo definimos en Mathematica y calculamos la matriz de Gram respecto de la base canónica:

In[6]:= **PE4[x_, y_] := 2 x[[1]] y[[1]] + 2 x[[2]] y[[2]] + 4 x[[3]] y[[3]] +**
2 x[[4]] y[[4]] + x[[1]] y[[3]] + x[[3]] y[[1]] +
x[[2]] y[[3]] + x[[3]] y[[2]] + x[[3]] y[[4]] +
x[[4]] y[[3]];
Bc=IdentityMatrix[4];
A = Gram[IdentityMatrix[4], PE4];

MatrixForm[A]

Out[]= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Recordemos que $< x, y > = x^t A y$, con A la matriz de Gram respecto de la base canónica, entonces una base ortogonal podríamos calcularla aplicando las fórmulas del método de Gram-Schmidt usando la matriz de Gram para calcular los productos escalares:

In[]:=
```
Bo = Table[0,{i,1,4}];
Bo[[1]] = Bc[[1]];
Bo[[2]] = Bc[[2]] – (Bc[[2]].A.Bo[[1]])/(Bo[[1]].A.Bo[[1]])*Bo[[1]];
Bo[[3]] = Bc[[3]] – ((Bc[[3]].A.Bo[[1]])/(Bo[[1]].A.Bo[[1]]))*Bo[[1]] –
        ((Bc[[3]].A.Bo[[2]])/(Bo[[2]].A.Bo[[2]]))*Bo[[2]];
Bo[[4]] = Bc[[4]] – ((Bc[[4]].A.Bo[[1]])/(Bo[[1]].A.Bo[[1]]))*Bo[[1]] –
        ((Bc[[4]].A.Bo[[2]])/(Bo[[2]].A.Bo[[2]]))*Bo[[2]] –
        ((Bc[[4]].A.Bo[[3]])/(Bo[[3]].A.Bo[[3]]))*Bo[[3]];
Print[Bo]
```

Out[]= {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {-1/2, -1/2, 1, 0}, {1/6, 1/6,-1/3, 1}}

Para comprobarlo, sólo necesitamos calcular la matriz de Gram para la base anterior, si dicha matriz es diagonal, entonces *Bo* será una base ortogonal y si la matriz de Gram que se obtiene es la identidad, entonces *Bo* es una base ortonormal.

In[]:= **Gram[B', PE4]MatrixForm**

Out[]= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$

Y podemos, fácilmente, tranformarla en ortonormal dividiendo cada vector por su norma:

In[]:= **B'' = Table[B'[[i]]/Sqrt[PE4[B'[[i]], B'[[i]]]], {i, Length[B']}]**

Out[]=

$$\{\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\}, \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\}, \{\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\}, \{\frac{1}{2\sqrt{15}}, \frac{1}{2\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\}\}$$